

Egy általános helyzetű lekerekített sarkú téglalap paraméteres egyenletrendszere

Az egyenletek felírása

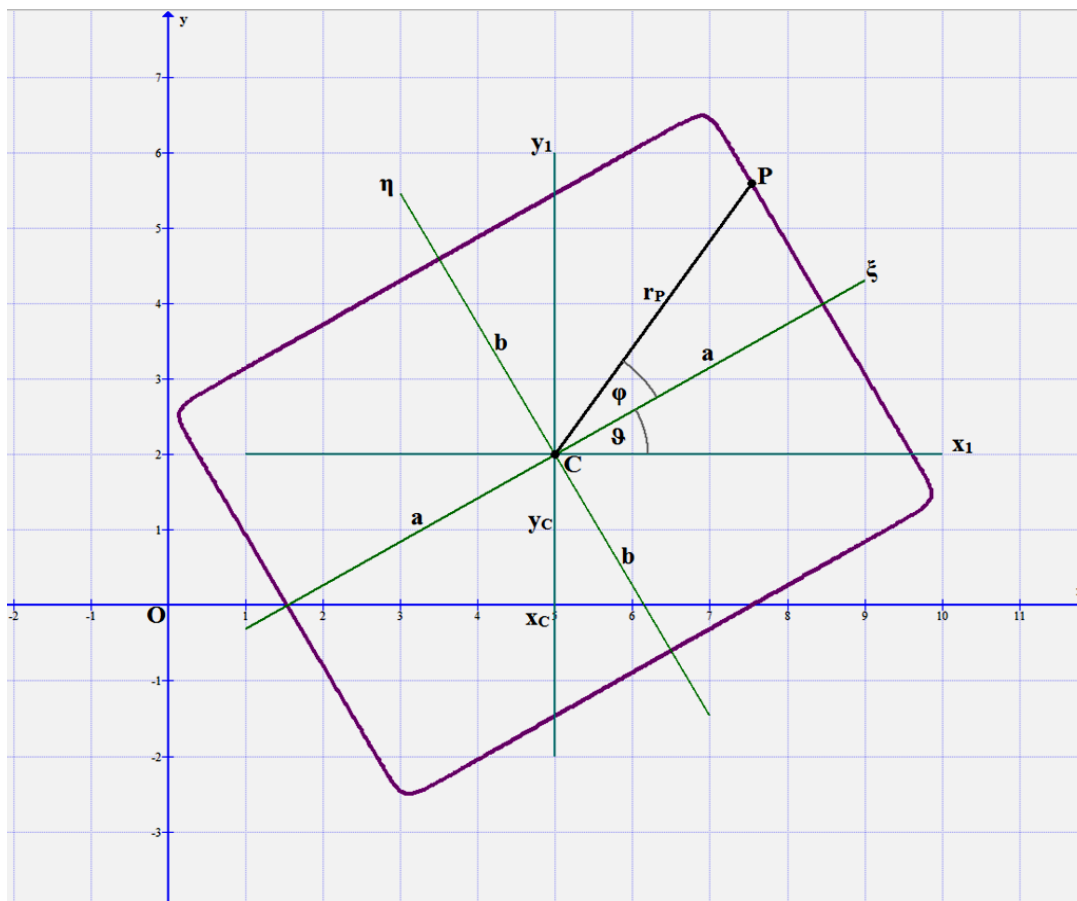
Korábbi dolgozataink már mintegy előkészítették a mostanit; ezek:

~ **KD - 1: Általános helyzetű ellipszis paraméteres egyenletrendszere;**

~ **KD - 2: A lekerekített sarkú téglalapról.**

Most összefűzzük az ezekben foglaltakat, majd ebből előáll a címbeli feladat megoldása: a keresett par. e. r. felírása.

Kezdjük a végeredménnyel, amit egy mintafeladat szemléltet – 1. ábra!



1. ábra

Látjuk, hogy a szuperellipszis C centrumának koordinátái (x_C, y_C) , tengelyeinek elforgatási szöge ϑ . A szuperellipszis (= lekerekített sarkú téglalap) egy tetszőleges P pontjának koordinátái az Oxy k. r. - ben:

$$x_P = x_C + r_P \cdot \cos(\varphi_P + \vartheta) , \quad y_P = y_C + r_P \cdot \sin(\varphi_P + \vartheta) . \quad (1)$$

A szuperellipszis polárkoordinátás egyenlete a $C\xi\eta$ k. r. - ben:

$$r(\varphi_P) = \frac{a \cdot b}{[(a \cdot \sin \varphi_P)^{2 \cdot n} + (b \cdot \cos \varphi_P)^{2 \cdot n}]^{\frac{1}{2 \cdot n}}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

Majd (1) és (2) - vel a keresett paraméteres egyenletrendszer, most már elhagyva a „*P*” indexet:

$$x = x_C + \frac{a \cdot b}{[(a \cdot \sin \varphi)^{2 \cdot n} + (b \cdot \cos \varphi)^{2 \cdot n}]^{\frac{1}{2 \cdot n}}} \cdot \cos(\varphi + \vartheta), \quad (3 / 1)$$

$$y = y_C + \frac{a \cdot b}{[(a \cdot \sin \varphi)^{2 \cdot n} + (b \cdot \cos \varphi)^{2 \cdot n}]^{\frac{1}{2 \cdot n}}} \cdot \sin(\varphi + \vartheta). \quad (3 / 2)$$

Az 1. ábra mintapéldájának adatai:

$$x_C = 5 \text{ (hosszegység)}; y_C = 2 \text{ (h. e.)}; a = 4 \text{ (h. e.)}; b = 3 \text{ (h. e.)}; n = 15; \vartheta = \pi / 6 \text{ (rad)}. \quad (A)$$

Ezzel feladatunkat megoldottuk.

Egy alkalmazás

Ha már itt tartunk, írjuk fel azon test *palástfelületének* egyenletét, melynek keresztmetsze - tei egymáshoz képest elforgatott helyzetű téglalapok. A forgatás tengelye a keresztmet - szeti síkidomok *C* centrumait összekötő egyenes.

A felület paraméteres egyenletrendszere, (3) - mal is, felhasználva, hogy az egyszerűség kedvéért legyen $x_C = y_C = 0$:

$$x(\varphi, t) = \frac{a \cdot b}{[(a \cdot \sin \varphi)^{2 \cdot n} + (b \cdot \cos \varphi)^{2 \cdot n}]^{\frac{1}{2 \cdot n}}} \cdot \cos[\varphi + \vartheta(t)]; \quad (4 / 1)$$

$$y(\varphi, t) = \frac{a \cdot b}{[(a \cdot \sin \varphi)^{2 \cdot n} + (b \cdot \cos \varphi)^{2 \cdot n}]^{\frac{1}{2 \cdot n}}} \cdot \sin[\varphi + \vartheta(t)]; \quad (4 / 2)$$

$$z(\varphi, t) = \frac{h}{2 \cdot \pi} \cdot \vartheta(t); \quad (4 / 3)$$

$$0 \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi; \quad (4 / 4)$$

$$\vartheta(t) = \omega \cdot t. \quad (4 / 5)$$

Itt ***h*** = ***konst.*** a csavar menetmagassága, ***t*** az idő, ***ω*** = ***konst.*** a forgatás szögsebessége, amit – ismét az egyszerűbb esetre való törekvés jegyében – állandóra vettünk fel.

Az ábrázoláshoz adatok:

$$a = 4 \text{ m} ; b = 3 \text{ m} ; n = 30 ; \omega = \pi / 4 \text{ rad/s} ; h = 16 \text{ m} . \quad (\text{B})$$

Most (B) és (4) szerint a csavarfelület paraméteres egyenletrendszere:

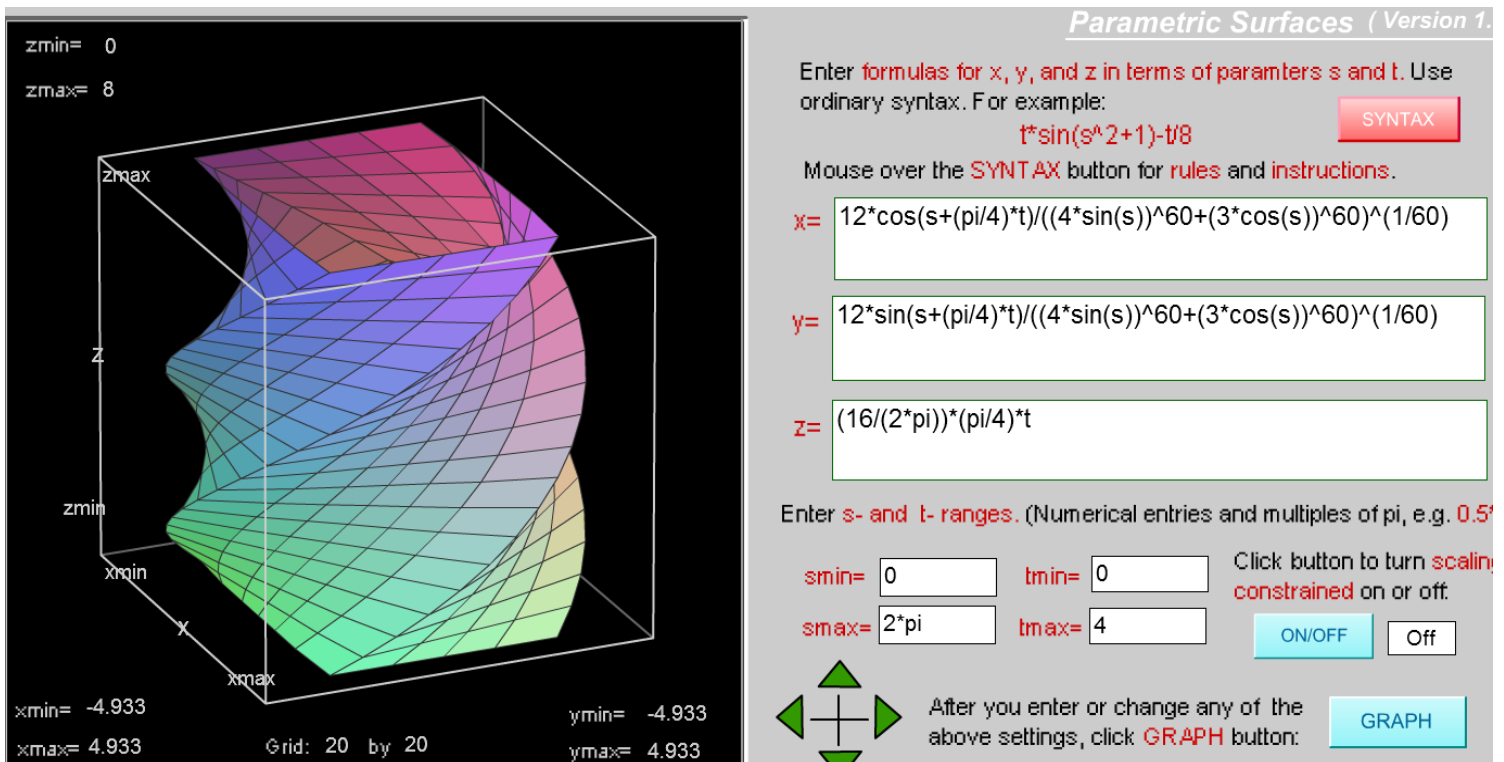
$$x(\varphi, t) = \frac{12}{[(4 \cdot \sin \varphi)^{60} + (3 \cdot \cos \varphi)^{60}]^{\frac{1}{60}}} \cdot \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \cdot t \right) \text{ (m)}; \quad (5/1)$$

$$y(\varphi, t) = \frac{12}{[(4 \cdot \sin \varphi)^{60} + (3 \cdot \cos \varphi)^{60}]^{\frac{1}{60}}} \cdot \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \cdot t \right) \text{ (m)}; \quad (5/2)$$

$$z(\varphi, t) = \frac{16 \text{ (m)}}{2 \cdot \pi \text{ (rad)}} \cdot \frac{\pi}{4} \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right) \cdot t \text{ (s)} = 2 \cdot t \text{ (m)}; \quad (5/3)$$

$$0 \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi \text{ (rad)}. \quad (5/4)$$

Az (5) képleteknek megfelelő felületet szemlélteti a 2. ábra.



2. ábra – forrása:

<http://www.flashandmath.com/mathlets/multicalc/paramrec/psjun4finr.html>

Megjegyzések:

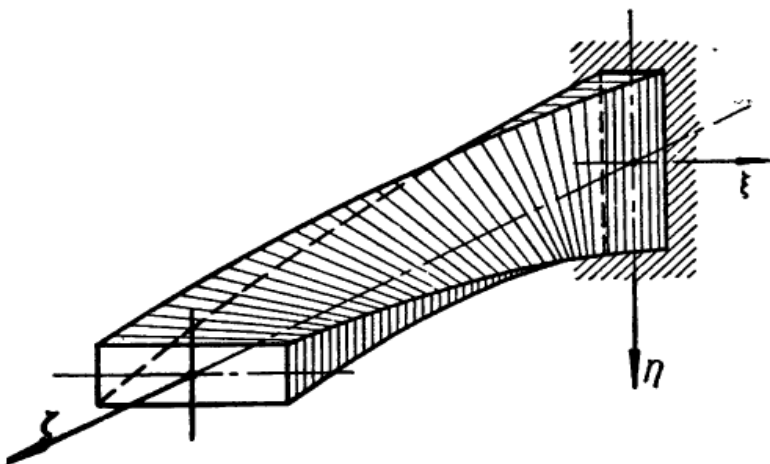
M1. A 2. ábrán látjuk, hogy a lekerekítés miatt a forgás tengelyétől legtávolabb lévő pont távolsága sem éri el a pontos téglalap itteni esetében Pitagorász tételével adódó $c = 5 \text{ m}$ - es távolságot. Továbbá örömmel állapítjuk meg, hogy a felhasznált ábrázoló szoftver nem tette lehetetlenné az ábra elkészítését. Nem volt ez mindig így.

M2. Megeshet, hogy valakiben felmerül, hogy mindez mire jó. Fura, de mintha egyre több gyakorlati alkalmazása lenne a csavart testeknek. Egy ilyen mutat a 3. ábra is.



3. ábra – forrása: http://tervlap.hu/uploads/large/2145_10504.jpg

M3. A 4. ábrán egy állandó keresztmetszetű, állandó csavarodású, egyenes tengelyvonalú rúd szilárdságtani (elméleti) vizsgálatához készített szemléltető rajzot mutatunk meg.



4. ábra – forrása: [1]

Bár megjelenése óta közel 60 év telt el, még ma sem látunk sűrűn hasonlókat.

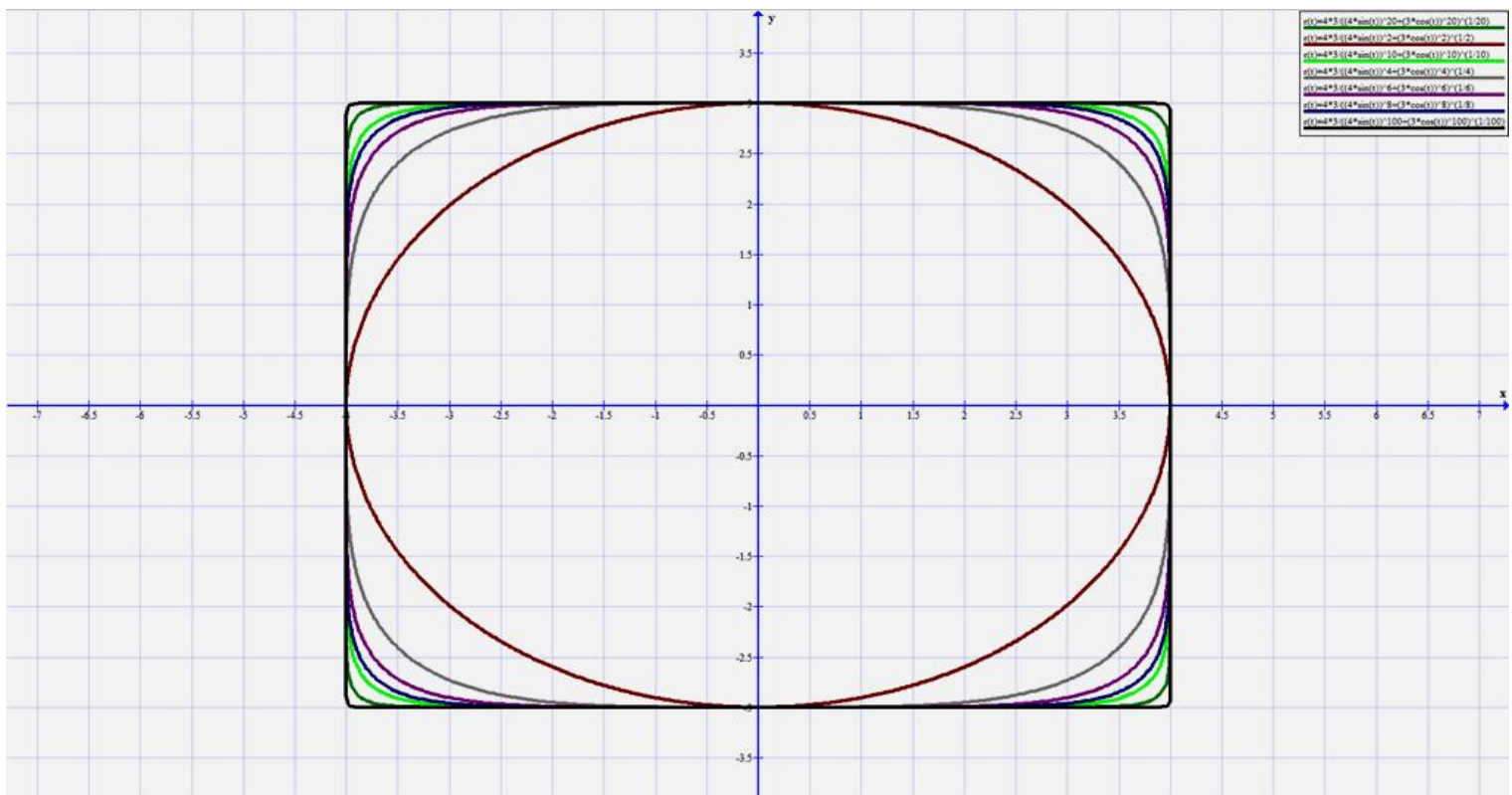
Igaz, az orosz műszaki szakirodalom már akkor is élenjáró volt. Annyira, hogy a 4. ábra (3 kötetes) forrásművét magyarra is lefordították, kisebb változtatásokkal. Egy ilyen figyelhető meg a magyar kiadás 7. kötetének 52. ábráján, ami fentinek egy változata.

(A módosítások a magyar kiadásban: az alkalmazott k. r. - t balosról jobbosra változtatták, valamint a rúd végére berajzolták az aktív külső terhelés nyomatóvektorát.)

A 4. ábrán a vonalkézással jól szemléltették a téglalap keresztmetszetű, egyenes tengely - vonalú rúd (állandó) csavarodását. E csavarodás a 2. ábra példája esetében (4 / 3) és (B) - vel is – [1] – :

$$\frac{d\vartheta}{dz} = \frac{d\vartheta}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} = \frac{\frac{d\vartheta}{dt}}{\frac{dz}{dt}} = \frac{\frac{d\vartheta}{dt}}{\frac{h}{2\pi \frac{d\vartheta}{dt}}} = \frac{2\pi}{h} = \frac{2\pi \text{ (rad)}}{16 \text{ (m)}} = 0,3927 \left(\frac{\text{rad}}{\text{m}} \right) = \text{konst.} \quad (6)$$

M4. Az 5. ábrán szuperellipsziseket rajzoltunk meg; itt a $2n$ kitevő értékei belülről kifelé haladva: **2 , 4 , 6 , 8 , 10 , 20 , 100**. Látható, hogy $n = 50$ - nél már szinte tökéletes a téglalap. A görbék egyenletei az ábra jobb felső sarkában olvashatók, esetleges nagyítás után.



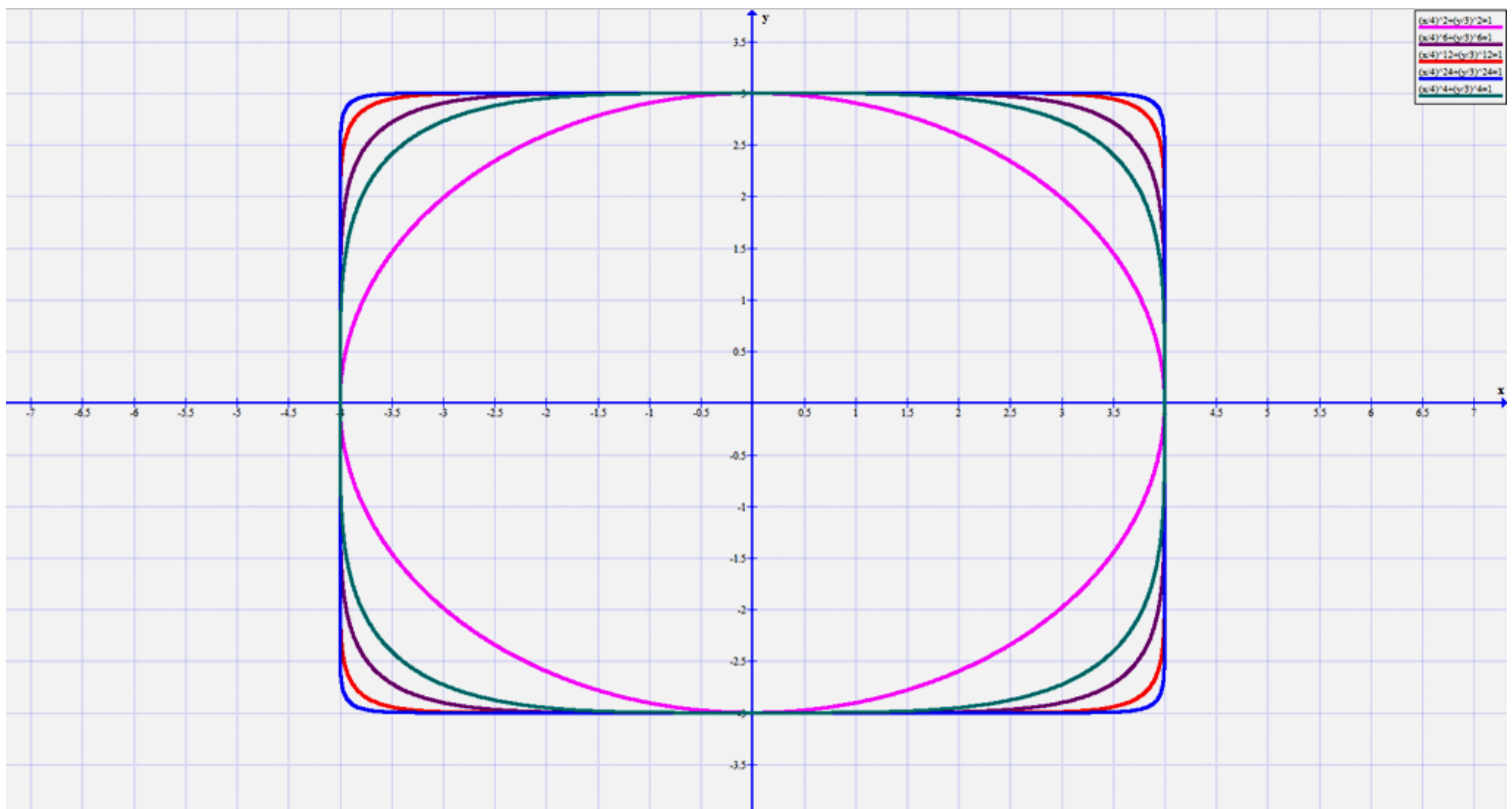
5. ábra

Viszonylag könnyen rajzoltathatunk 5. ábra szerinti „téglalapot” a **Graph** ingyenes szoftverrel, ha a (2) képlettel dolgozunk, a **Polárfüggvény** lehetőséget választva.

M5. Egy még egyszerűbb eljárás mód lehet az – ha nincs az 1. ábrához hasonló bonyolultabb ábrára szükség –, hogy a szuperellipszis

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2 \cdot n} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2 \cdot n} = 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

alakú kanonikus egyenletével, a **Graph** szoftver **Függvény → Egyenlet beszúrása** funkcióival dolgozunk. Így készült a 6. ábra is, ahol a **2n** hatványkitevők értékei, belülről kifelé haladva: **2, 4, 6, 12, 24**. (Egyenletek a jobb felső sarokban.)



6. ábra

Forrás:

[1] – Szerk. **Sz. D. Ponomarjov**: Raszcsotü na procsnoszty v masinosztrojenyii, Tom III. MASGIZ, Moszkva, 1959., 859. o.

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
mérnök tanár

Sződliget, 2017. 07. 16.